m, n を負でない整数とし、

$$I(m,n)=\int_0^{\frac{1}{2}} x^m(1-x)^n dx \ (m\geq 0, n\geq 0)$$

$$J(m,n)=\int_0^{1} x^m(1-x)^n dx \ (m\geq 0, n\geq 0)$$

で定義する。

$J(m,n)=\int_0^{1} x^m(1-x)^n dx \ (m\geq 0, n\geq 0)$ より、

$$J(m,n)=\left[\frac{1}{m+1}x^{m+1}(1-x)^n\right]_0^1-\frac{1}{m+1}\int_0^1 x^{m+1}n(1-x)^{n-1}(-1)dx \ (m\geq 0, n\geq 1)$$

$$=\frac{n}{m+1}J(m+1,n-1)$$

$$=\frac{n}{m+1}\cdot\frac{n-1}{m+2}\cdots\cdots\frac{1}{m+n}J(m+n,0)$$

また、

$$J(m+n,0)=\int_0^1 x^{m+n}dx=\left[\frac{1}{m+n+1}x^{m+n+1}\right]_0^1=\frac{1}{m+n+1}\cdots①$$

より

$$J(m,n)=\frac{n}{m+1}\cdot\frac{n-1}{m+2}\cdots\cdots\frac{1}{m+n}\cdot\frac{1}{m+n+1}$$

$$=\frac{m!n!}{(m+n+1)!}\ (m\geq 0, n\geq 1)\cdots②$$

$n=0$ のとき①より $J(m,0)=\dfrac{1}{m+1}$ となり、②に $n=0$ を代入すると、$J(m,0)=\dfrac{1}{m+1}$ となるので、②は $n=0$ のときも成り立つので、

$$J(m,n)=\frac{m!n!}{(m+n+1)!}\ (m\geq 0, n\geq 0)\cdots③$$

$$J(m,n)=\int_0^{\frac{1}{2}} x^m(1-x)^n dx+\int_{\frac{1}{2}}^1 x^m(1-x)^n dx$$

$$=I(m,n)+\int_{\frac{1}{2}}^1 x^m(1-x)^n dx\cdots④$$

$K(m,n)=\int_{\frac{1}{2}}^1 x^m(1-x)^n dx$ とおく。

$x=1-t$ とおくと、$1-x=t,\ dx=-dt,\ x:\dfrac{1}{2}\to 1\Rightarrow x:\dfrac{1}{2}\to 1\Rightarrow t:\dfrac{1}{2}\to 0$ より

$$K(m,n)=\int_{\frac{1}{2}}^{0}(1-t)^m t^n(-1)dt$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}(1-t)^m t^n dt$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}x^n(1-x)^m dx$$

$$=I(n,m)\cdots⑤$$

よって、⑤を④に代入して、

$I(m,n)+I(n,m)=J(m,n)\ (m\geq 0,n\geq 0)\cdots⑥$

⑥の n に m を代入すると、

$I(m,m)+I(m,m)=J(m,m)$

より

$$I(m,m)=\frac{1}{2}J(m,m)$$

③の n に m を代入すると、

$$J(m,m)=\frac{m!m!}{(m+m+1)!}=\frac{(m!)^2}{(2m+1)!}\ (m\geq 0)$$

以上より、

$$I(m,m)=\frac{1}{2}J(m,m)=\frac{(m!)^2}{2(2m+1)!}\ (m\geq 0)$$